Intervalos de confianza para la media

Ejercicio nº 1.-

Las ventas diarias, en euros, en un determinado comercio siguen una distribución *N*(950, 200). Calcula la probabilidad de que las ventas diarias en ese comercio:

a) Superen los 1200 euros.

b) Estén entre 700 y 1000 euros.

Ejercicio nº 2.-

El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal *N*(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.

b) Entre 180 y 220 unidades.

Ejercicio nº 3.-

La edad de un determinado grupo de personas sigue una distribución *N*(35, 10). Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegido al azar, tenga:

a) Más de 40 años.

b) Entre 23 y 47 años.

Ejercicio nº 4.-

El peso de una carga de naranjas, en gramos, sigue una distribución *N*(175, 12). Calcula la probabilidad de que una naranja elegida al azar pese:

a) Más de 200 gramos.

b) Entre 150 y 190 gramos.

Ejercicio nº 5.-

El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución *N*(10, 2). Calcula la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

a) Menos de 7 horas.

b) Entre 8 y 13 horas.

Ejercicio nº 6.-

En una distribución normal con media $\mu = 8{,}2$ y desviación típica $\sigma = 2{,}1$, halla el intervalo característico para el 90%.

Ejercicio nº 7.-

En una distribución *N* (25, 8), halla el intervalo característico correspondiente a una probabilidad $p = 0{,}99$.

Ejercicio nº 8.-

En una distribución normal con media $\mu = 15$ y desviación típica $\sigma = 3{,}2$, obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k,\ \mu + k)$, de forma que el 90% de los individuos estén en ese intervalo.

Ejercicio nº 9.-

En una distribución $N(5, 2)$, obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k,\ \mu + k)$, tal que:

$$P[\mu - k < x < \mu + k] = 0{,}95$$

Ejercicio nº 10.-

Obtén el intervalo característico para el 95%, en una distribución $N(120, 25)$.

Ejercicio nº 11.-

La duración de un determinado tipo de pilas sigue una distribución normal con una media de 50 horas y una desviación típica de 5 horas. Empaquetamos las pilas en cajas de 16:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las pilas de una de las cajas sea inferior a 48 horas?

b) ¿Cuál es la distribución de la duración media de las pilas de las cajas?

Ejercicio nº 12.-

En una distribución $N(35, 6)$, tomamos muestras de tamaño 49.

a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 33 y 36?

Ejercicio nº 13.-

En una determinada población, los pesos se distribuyen según una normal de media $\mu = 65$ kg y varianza 49. Si extraemos muestras de tamaño 64:

a) ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de los pesos en una de esas muestras sea mayor de 66,5 kg?

Ejercicio nº 14.-

La edad de los miembros de una determinada asociación sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Sabemos que la distribución de las medias de las edades en muestras de tamaño 36 tiene como media 52 años y como desviación típica 0,5.

a) Halla la media y la desviación típica de la edad de los miembros de la asociación.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la asociación, elegido al azar, sea mayor de 60 años?

Ejercicio nº 15.-

La media de edad de los lectores de una determinada revista es de 17,2 años, y la desviación típica, 2,3 años. Si elegimos muestras de 100 lectores:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra está comprendida entre 16,7 y 17,5 años?

b) ¿Cuál es la distribución de las medias muestrales?

Ejercicio nº 16.-

El peso de las truchas de una piscifactoría se distribuye según una normal de media 150 gramos y varianza 1 225.

Halla un intervalo en el que se encuentren el 95% de las medias de pesos de las muestras de tamaño 50.

Ejercicio nº 17.-

La edad de los alumnos de 2º de Bachillerato de cierto instituto sigue una distribución *N* (17,6; 0,5). Los agrupamos al azar de 10 en 10 para una competición.

Halla el intervalo característico del 95% correspondiente a las edades medias de los grupos.

Ejercicio nº 18.-

En un examen de oposición al que se presentaban 5 000 personas, la nota media ha sido de 4,2 puntos, con una desviación típica de 2,1. Si se toman muestras de 60 opositores, halla el intervalo característico del 90% para las notas medias de las muestras.

Ejercicio nº 19.-

La duración de cierto tipo de batería sigue una distribución normal de media 3 años y desviación típica de 0,5 años. Si se toman muestras de tamaño 9, halla un intervalo en el que estén comprendidos el 99% de las duraciones medias de las baterías de cada muestra.

Ejercicio nº 20.-

En un test de matemáticas que se pasó a 1 000 alumnos de 2º de Bachillerato, se observó que las puntuaciones obtenidas seguían una distribución *N* (67, 20).

Si consideramos muestras de 15 alumnos de los que hicieron el test, halla un intervalo en el que se encuentren el 99,73% de las puntuaciones medias de los alumnos de cada muestra.

Ejercicio nº 21.-

En una determinada empresa, se seleccionó al azar una muestra de 100 empleados cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 705 euros, con una desviación típica de 120 euros. Halla un intervalo de confianza al 99% para la media de los ingresos mensuales de todos los empleados de la empresa.

Ejercicio nº 22.-

En una muestra aleatoria de 200 estudiantes de 2º de Bachillerato, se ha observado que la asistencia media a una serie de actos culturales celebrados durante el mes de mayo fue igual a 8, con una desviación típica igual a 6.

Determina el intervalo de confianza para la asistencia media de los alumnos de 2º de Bachillerato a los actos culturales celebrados durante el mes de mayo, con un nivel de significación del 5%.

Ejercicio nº 23.-

La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento, fabricadas por cierta máquina, fue de 0,824 cm, y la desviación típica fue de 0,042 cm. Halla los límites de confianza al 95% para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.

Ejercicio nº 24.-

La estatura de los habitantes mayores de edad de una determinada ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 36 cm^2. En una muestra aleatoria de 80 individuos de esta ciudad, hemos obtenido una estatura media de 172 cm. Determina un intervalo de confianza del 95,44% para la estatura media de los habitantes mayores de edad de dicha ciudad.

Ejercicio nº 25.-

Los pesos en una determinada población siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 5 kg. Pesando a 10 individuos de dicha población, se obtuvieron los siguientes resultados medidos en kilogramos:

62 65 63 58 64 60 57 62 60 58

Halla un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de la población.

Ejercicio nº 26.-

En un determinado lugar, se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1 060 euros con una desviación típica de 200 euros. Si se considera un nivel de significación igual a 0,01, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor de 30 euros?

Ejercicio nº 27.-

El peso, en kilogramos, de un determinado colectivo se distribuye según una normal de desviación típica igual a 5 kg.

¿Cuántos individuos debemos seleccionar en la muestra si queremos que la media de la muestra no difiera en más de 1kg de la media de la población, con probabilidad 0,95?

Ejercicio nº 28.-

En una muestra de 1 000 personas, mayores de 18 años, de una ciudad, hemos obtenido una estatura media de 1,72 m y una desviación típica de 0,4 m.

Con estos datos, hemos concluido que, la estatura media de los habitantes mayores de 18 años de esa ciudad está entre 170 cm y 174 cm. ¿Con qué nivel de confianza hemos llegado a dicha conclusión?

Ejercicio nº 29.-

Se sabe que el contenido de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal cuya varianza es conocida, teniendo un valor de 0,25. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante una muestra, admitiéndose un error máximo de 0,2 con una confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser, como mínimo, el tamaño de la muestra?

Ejercicio nº 30.-

La edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la universidad sigue una distribución normal con varianza 0,36. Deseamos estimar la edad media de dichos estudiantes con un error menor de 0,2 años y con una confianza del 99,5%. ¿De qué tamaño, como mínimo, debemos seleccionar la muestra?

Solución intervalos para la media

Ejercicio nº 1.-

Las ventas diarias, en euros, en un determinado comercio siguen una distribución *N*(950, 200). Calcula la probabilidad de que las ventas diarias en ese comercio:

a) Superen los 1200 euros.

b) Estén entre 700 y 1000 euros.

Solución:

a) $p[x > 1200] = p\left[\frac{x-950}{200} > \frac{1200-950}{200}\right] = p[z > 1,25] =$

$$= 1 - p[z \le 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

b) $p[700 < x < 1000] = p\left[\frac{700-950}{200} < \frac{x-950}{200} < \frac{1000-950}{200}\right] =$

$$= p[-1 < z < 0,25] = p[z < 0,25] - p[z < -1] =$$

$$= p[z < 0,25] - p[z > 1] = p[z < 0,25] - (1 - p[z \le 1]) =$$

$$= 0,5987 - (1 - 0,8413) = 0,44$$

Ejercicio nº 2.-

El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal *N*(192, 12). Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.

b) Entre 180 y 220 unidades.

Solución:

a) $p[x > 200] = p\left[\frac{x-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right] = p[z > 0,67] =$

$$= 1 - p[z \le 0,67] = 1 - 0,7486 = 0,2514$$

b) $p[180 < x < 220] = p\left[\frac{180-192}{12} < \frac{x-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right] =$

$$= p[-1 < z < 2,33] = p[z < 2,33] - p[z < -1] =$$

$$= p[z < 2,33] - p[z > 1] = p[z < 2,33] - (1 - p[z \le 1]) =$$

$$= 0,9901 - (1 - 0,8413) = 0,8314$$

Ejercicio nº 3.-

La edad de un determinado grupo de personas sigue una distribución *N*(35, 10). Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegido al azar, tenga:

a) Más de 40 años.

b) Entre 23 y 47 años.

Solución:

a) $p[x > 40] = p\left[\frac{x-35}{10} > \frac{40-35}{10}\right] = p[z > 0{,}5] =$

$= 1 - p[z \le 0{,}5] = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

b) $p[23 < x < 47] = p\left[\frac{23-35}{10} < \frac{x-35}{10} < \frac{47-35}{10}\right] = p[-1{,}2 < z < 1{,}2] =$

$= 2(0{,}8849 - 0{,}5) = 0{,}7698$

Ejercicio nº 4.-

El peso de una carga de naranjas, en gramos, sigue una distribución *N*(175, 12). Calcula la probabilidad de que una naranja elegida al azar pese:

a) Más de 200 gramos.

b) Entre 150 y 190 gramos.

Solución:

a) $p[x > 200] = p\left[\frac{x-175}{12} > \frac{200-175}{12}\right] = p[z > 2{,}08] =$

$= 1 - p[z \le 2{,}08] = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$

b) $p[150 < x < 190] = p\left[\frac{150-175}{12} < \frac{x-175}{12} < \frac{190-175}{12}\right] =$

$= p[-2{,}08 < z < 1{,}25] = p[z < 1{,}25] - p[z < -2{,}08] =$

$= p[z < 1{,}25] - p[z > 2{,}08] = p[z < 1{,}25] - (1 - p[z \le 2{,}08]) =$

$= 0{,}8944 - (1 - 0{,}9812) = 0{,}8756$

Ejercicio nº 5.-

El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución *N*(10, 2). Calcula la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

a) Menos de 7 horas.

b) Entre 8 y 13 horas.

Solución:

a) $p[x<7]=p\left[\frac{x-10}{2}<\frac{7-10}{2}\right]=p[z<-1{,}5]=$

$$=p[z>1{,}5]=1-p[z\leq 1{,}5]=1-0{,}9332=0{,}0668$$

b) $p[8<x<13]=p\left[\frac{8-10}{2}<\frac{x-10}{2}<\frac{13-10}{2}\right]=p[-1<z<1{,}5]=$

$$=p[z<1{,}5]-p[z<-1]=p[z<1{,}5]-p[z>1]=$$

$$=p[z<1{,}5]-(1-p[z\leq 1])=0{,}9332-(1-0{,}8413)=0{,}7745$$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

En una distribución normal con media $\mu = 8{,}2$ y desviación típica $\sigma = 2{,}1$, halla el intervalo característico para el 90%.

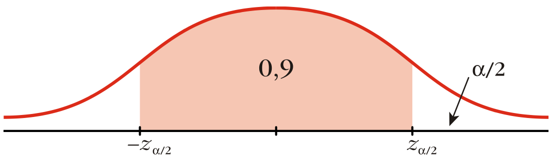
Solución:

El intervalo característico es de la forma:

$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$

donde $z_{\alpha/2}$ es tal que $P[-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$, con $z \sim N(0, 1)$.

Para el 90%, tenemos que:



$1 - \alpha = 0{,}9 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Por tanto, el intervalo será:

$(8{,}2 - 1{,}645 \cdot 2{,}1;\ \ 8{,}2 + 1{,}645 \cdot 2{,}1)$, es decir:

$(4{,}7455;\ 11{,}6545)$

Esto significa que el 90% de los individuos está en ese intervalo.

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

En una distribución $N(25, 8)$, halla el intervalo característico correspondiente a una probabilidad $p = 0{,}99$.

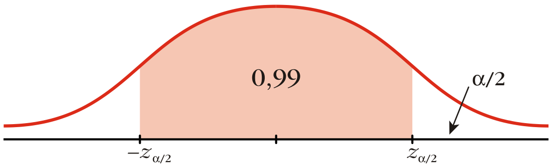
Solución:

El intervalo característico es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, \ \ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es tal que $P[-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$, con $z \sim N(0, 1)$.

Para una probabilidad $p = 0{,}99$, tenemos que:



$$1 - \alpha = 0{,}99 \ \ \rightarrow \ \ z_{\alpha/2} = 2{,}575$$

Por tanto, el intervalo será:

$(25 - 2{,}575 \cdot 8; \ \ 25 + 2{,}575 \cdot 8)$, es decir:

$(4{,}4; 45{,}6)$

Esto significa que el 99% de los individuos de la población con distribución $N(25, 8)$ se encuentran en este intervalo.

Ejercicio nº 8.-

En una distribución normal con media $\mu = 15$ y desviación típica $\sigma = 3{,}2$, obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k, \ \mu + k)$, de forma que el 90% de los individuos estén en ese intervalo.

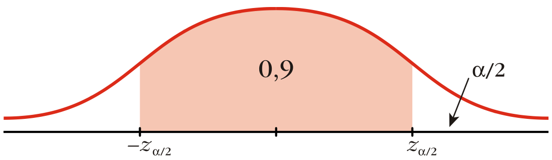
Solución:

Se trata de hallar el intervalo característico correspondiente al 90%. Este intervalo es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, \ \ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es tal que $P[-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$, con $z \sim N(0, 1)$.

Para el 90%, tenemos que:



$$1 - \alpha = 0{,}9 \ \ \rightarrow \ \ z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

Por tanto, el intervalo será:

$(15 - 1{,}645 \cdot 3{,}2; \ \ 15 + 1{,}645 \cdot 3{,}2)$, es decir:

$(9{,}736; 20{,}264)$

Ejercicio nº 9.-

En una distribución $N(5, 2)$, obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k, \ \mu + k)$, tal que:

$$\boldsymbol{P[\mu - k < x < \mu + k] = 0{,}95}$$

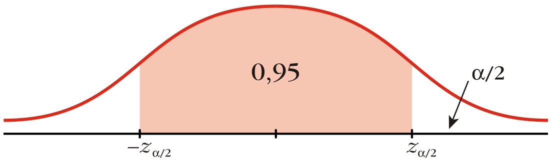
Solución:

Tenemos que hallar el intervalo característico correspondiente a una probabilidad de 0,95. Este intervalo es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es tal que $P[-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$, con $z \sim N(0, 1)$.

Para una probabilidad de 0,95, tenemos que:



$$1 - \alpha = 0{,}95 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Por tanto, el intervalo será:

$$(5 - 1{,}96 \cdot 2;\ \ 5 + 1{,}96 \cdot 2),\ \text{es decir:}$$

$$(1{,}08;\ 8{,}92)$$

Esto significa que el 95% de los individuos están en este intervalo.

Ejercicio nº 10.-

Obtén el intervalo característico para el 95%, en una distribución *N* (120, 25).

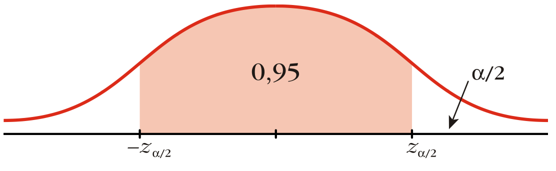
Solución:

El intervalo característico es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es tal que $P[-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}] = 1 - \alpha$, con $z \sim N(0, 1)$.

Para el 95%, tenemos que:



$$1 - \alpha = 0{,}95 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Por tanto, el intervalo será:

$$(120 - 1{,}96 \cdot 25;\ \ 120 + 1{,}96 \cdot 25),\ \text{es decir:}$$

$$(71;\ 169)$$

Esto significa que el 95% de los individuos están en este intervalo.

Ejercicio nº 11.-

La duración de un determinado tipo de pilas sigue una distribución normal con una media de 50 horas y una desviación típica de 5 horas. Empaquetamos las pilas en cajas de 16:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración media de las pilas de una de las cajas sea inferior a 48 horas?

b) ¿Cuál es la distribución de la duración media de las pilas de las cajas?

Solución:

a) Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales siguen una distribución normal de media $\mu = 50$ horas y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

Es decir, se distribuyen N (50; 1,25). Por tanto, si z es N (0, 1), tenemos que:

$$P[\bar{x} < 48] = P\left[z < \frac{48-50}{1{,}25}\right] = P[z < -1{,}6] = P[z > 1{,}6] = 1 - P[z \le 1{,}6] = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$$

La probabilidad pedida es de 0,0548.

b) Ya hemos averiguado en el apartado anterior que se distribuyen N (50; 1,25).

Ejercicio nº 12.-

En una distribución *N* (35, 6), tomamos muestras de tamaño 49.

a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 33 y 36?

Solución:

a) Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales siguen una distribución normal de media $\mu = 35$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$.

Es decir, se distribuyen $N\left(35; \frac{6}{7}\right)$.

b) Como ya conocemos la distribución de las medias muestrales, entonces, si z es N (0, 1), tenemos que:

$$P[33 < \bar{x} < 36] = P\left[\frac{33-35}{\frac{6}{7}} < z < \frac{36-35}{\frac{6}{7}}\right] = P[-2{,}33 < z < 1{,}17] =$$

$$= P[z < 1{,}17] - P[z < -2{,}33] = P[z < 1{,}17] - P[z > 2{,}33] = P[z < 1{,}17] - (1 - P[z \le 2{,}33]) =$$

$= 0{,}8790 - (1 - 0{,}9901) = 0{,}8691$

La probabilidad pedida es de 0,8691.

Ejercicio nº 13.-

En una determinada población, los pesos se distribuyen según una normal de media μ = 65 kg y varianza 49. Si extraemos muestras de tamaño 64:

a) ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de los pesos en una de esas muestras sea mayor de 66,5 kg?

Solución:

a) Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media $\mu = 65$ y de desviación típica

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}. \text{ Es decir, se distribuyen } N\left(65; \frac{7}{8}\right).$$

b) Como conocemos la distribución de $\bar{x}$, por el apartado anterior, entonces, si z es $N(0, 1)$:

$$P[\bar{x} > 66{,}5] = P\left[z > \frac{66{,}5 - 65}{\frac{7}{8}}\right] = P[z > 1{,}71] = 1 - P[z \le 1{,}71] = 1 - 0{,}9564 = 0{,}0436$$

La probabilidad pedida es de 0,0436.

Ejercicio nº 14.-

La edad de los miembros de una determinada asociación sigue una distribución *N* (μ, σ). Sabemos que la distribución de las medias de las edades en muestras de tamaño 36 tiene como media 52 años y como desviación típica 0,5.

a) Halla la media y la desviación típica de la edad de los miembros de la asociación.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de la asociación, elegido al azar, sea mayor de 60 años?

Solución:

a) Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales se distribuyen según una normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Como tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \mu = 52 \\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}5 \\ n = 36 \end{array}\right\} \text{ Entonces } \left\{\begin{array}{l} \mu = 52 \\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{36}} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \sigma = 0{,}5 \cdot 6 = 3 \end{array}\right.$$

Por tanto, la edad de los miembros de la asociación tiene una media de 52 años y una desviación típica de 3 años, es decir, se distribuye *N* (52, 3).

b) Por lo obtenido en el apartado anterior, tenemos que, si z es *N* (0, 1):

$$P[x > 60] = P\left[z > \frac{60 - 52}{3}\right] = P[z > 2{,}67] = 1 - P[z \le 2{,}67] = 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038$$

La probabilidad pedida es de 0,0038.

Ejercicio nº 15.-

La media de edad de los lectores de una determinada revista es de 17,2 años, y la desviación típica, 2,3 años. Si elegimos muestras de 100 lectores:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la edad de la muestra está comprendida entre 16,7 y 17,5 años?

b) ¿Cuál es la distribución de las medias muestrales?

Solución:

a) Como el tamaño de la muestra es $n = 100$ ($n \geq 30$), por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media

$\mu = 17{,}2$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}3}{\sqrt{100}} = \frac{2{,}3}{10} = 0{,}23$. Por tanto, si z es $N(0, 1)$:

$$P[16{,}7 < \bar{x} < 17{,}5] = P\left[\frac{16{,}7 - 17{,}2}{0{,}23} < z < \frac{17{,}5 - 17{,}2}{0{,}23}\right] = P[-2{,}17 < z < 1{,}30] =$$

$$= P[z < 1{,}30] - P[z < -2{,}17] = P[z < 1{,}30] - P[z > 2{,}17] = P[z < 1{,}30] - (1 - P[z \leq 2{,}17]) =$$

$$= 0{,}9032 - (1 - 0{,}9850) = 0{,}8882$$

La probabilidad pedida es de 0,8882.

b) Ya hemos hallado, en el apartado anterior, que las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen N (17,2; 0,23).

Ejercicio nº 16.-

El peso de las truchas de una piscifactoría se distribuye según una normal de media 150 gramos y varianza 1 225.

Halla un intervalo en el que se encuentren el 95% de las medias de pesos de las muestras de tamaño 50.

Solución:

Si la varianza es 1 225, la desviación típica será de $\sqrt{1\,225} = 35$ gramos.

Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales se distribuyen $N\left(150; \frac{35}{\sqrt{50}}\right)$.

El intervalo característico es de la forma:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 95%, sabemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así, el intervalo será:

$$\left(150-1{,}96\cdot\frac{35}{\sqrt{50}};\ 150+1{,}96\cdot\frac{35}{\sqrt{50}}\right);\ \text{es decir:}$$

(140,298; 159,702)

Por tanto, en el 95% de las muestras, las media de los pesos estarán comprendidas entre 140,298 y 159,702 gramos.

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

La edad de los alumnos de 2º de Bachillerato de cierto instituto sigue una distribución *N* (17,6; 0,5). Los agrupamos al azar de 10 en 10 para una competición.

Halla el intervalo característico del 95% correspondiente a las edades medias de los grupos.

Solución:

Como la población de partida es normal, las medias muestrales también se distribuyen según una normal, para cualquier valor de n.

En este caso, las edades medias de los grupos se distribuyen $N\left(17{,}6;\ \frac{0{,}5}{\sqrt{10}}\right)$.

El intervalo característico es de la forma:

$$\left(\mu-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 95%, tenemos que $z_{\alpha/2}=1{,}96$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(17{,}6-1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{10}};\ 17{,}6+1{,}96\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{10}}\right);\ \text{es decir:}$$

(17,29; 17,91)

Por tanto, las edades medias en el 95% de los grupos están entre 17,29 y 17,91 años.

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

En un examen de oposición al que se presentaban 5 000 personas, la nota media ha sido de 4,2 puntos, con una desviación típica de 2,1. Si se toman muestras de 60 opositores, halla el intervalo característico del 90% para las notas medias de las muestras.

Solución:

Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales se distribuyen

$$N\left(4{,}2;\ \frac{2{,}1}{\sqrt{60}}\right).$$

El intervalo característico es de la forma:

$$\left(\mu-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 90%, sabemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. Así, el intervalo será:

$$\left(4{,}2 - 1{,}645 \cdot \frac{2{,}1}{\sqrt{60}};\ 4{,}2 + 1{,}645 \cdot \frac{2{,}1}{\sqrt{60}}\right);\ \text{es decir:}$$

(3,75; 4,65)

Por tanto, en el 90% de las muestras, las notas medias estarán comprendidas entre 3,75 y 4,65 puntos.

<u>Ejercicio nº 19.-</u>

La duración de cierto tipo de batería sigue una distribución normal de media 3 años y desviación típica de 0,5 años. Si se toman muestras de tamaño 9, halla un intervalo en el que estén comprendidos el 99% de las duraciones medias de las baterías de cada muestra.

Solución:

Por el teorema central del límite, como la población de partida es normal, sabemos que las medias muestrales se distribuyen según una $N\left(3;\ \frac{0{,}5}{\sqrt{9}}\right)$.

El intervalo característico es de la forma:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 99%, sabemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(3 - 2{,}575 \cdot \frac{0{,}5}{3};\ 3 + 2{,}575 \cdot \frac{0{,}5}{3}\right);\ \text{es decir:}$$

(2,57; 3,43)

Por tanto, las duraciones medias de las baterías en el 99% de las muestras estarán comprendidas entre 2,57 y 3,43 años.

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

En un test de matemáticas que se pasó a 1 000 alumnos de 2º de Bachillerato, se observó que las puntuaciones obtenidas seguían una distribución *N* (67, 20).

Si consideramos muestras de 15 alumnos de los que hicieron el test, halla un intervalo en el que se encuentren el 99,73% de las puntuaciones medias de los alumnos de cada muestra.

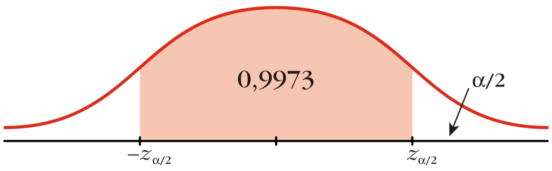
Solución:

Por el teorema central del límite, sabemos que las medias muestrales se distribuyen $N\left(67;\ \frac{20}{\sqrt{15}}\right)$.

El intervalo característico es de la forma:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 99,73%, tenemos que:



$$1-\alpha = 0{,}9973 \;\rightarrow\; \frac{\alpha}{2} = 0{,}00135 \;\rightarrow\; P\left[z \le z_{\alpha/2}\right] = 0{,}9973 + 0{,}00135 = 0{,}99865 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 3$$

Así, el intervalo será:

$$\left(67 - 3 \cdot \frac{20}{\sqrt{15}};\; 67 + 3 \cdot \frac{20}{\sqrt{15}}\right);\; \text{es decir:}$$

(51,51; 82,49)

Por tanto, en el 99,73% de las muestras, las medias están comprendidas entre 51,51 y 82,49 puntos.

Ejercicio nº 21.-

En una determinada empresa, se seleccionó al azar una muestra de 100 empleados cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 705 euros, con una desviación típica de 120 euros. Halla un intervalo de confianza al 99% para la media de los ingresos mensuales de todos los empleados de la empresa.

Solución:

Queremos estimar la media de la población, μ, mediante una muestra de tamaño 100, con un nivel de confianza del 99%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\; \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 99%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}99 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

Por tanto, el intervalo buscado es:

$$\left(705 - 2{,}575 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}};\; 705 + 2{,}575 \cdot \frac{120}{\sqrt{100}}\right);\; \text{es decir:}$$

(674,1; 735,9)

Así, tenemos una confianza del 99% de que el sueldo medio de todos los empleados de la empresa está comprendido entre 674,1 y 735,9 euros.

Ejercicio nº 22.-

En una muestra aleatoria de 200 estudiantes de 2º de Bachillerato, se ha observado que la asistencia media a una serie de actos culturales celebrados durante el mes de mayo fue igual a 8, con una desviación típica igual a 6.

Determina el intervalo de confianza para la asistencia media de los alumnos de 2º de Bachillerato a los actos culturales celebrados durante el mes de mayo, con un nivel de significación del 5%.

Solución:

Queremos estimar la media de la población, μ, mediante una muestra de tamaño 200, con un nivel de significación del 5% (esto es, con un nivel de confianza del 95%). El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Para $\alpha = 0{,}05$, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(8 - 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{200}};\ 8 + 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{200}}\right);\ \text{es decir, } (7{,}17;\ 8{,}83).$$

Tenemos la confianza del 95% de que la media de la población está comprendido entre 7,17 y 8,83.

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento, fabricadas por cierta máquina, fue de 0,824 cm, y la desviación típica fue de 0,042 cm. Halla los límites de confianza al 95% para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.

Solución:

Queremos estimar la media de la población, μ, mediante una muestra de tamaño 200, con un nivel de confianza del 95%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

Por tanto, el intervalo será:

$$\left(0{,}824 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}042}{\sqrt{200}};\ 0{,}824 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}042}{\sqrt{200}}\right);\ \text{es decir:}$$

(0,818; 0,830)

Tenemos la confianza del 95% de que la media de la población está comprendida entre 0,818 y 0,830 cm.

<u>Ejercicio nº 24.-</u>

La estatura de los habitantes mayores de edad de una determinada ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y varianza 36 cm^2. En una muestra aleatoria de 80 individuos de esta ciudad, hemos obtenido una estatura media de 172 cm. Determina un intervalo de confianza del 95,44% para la estatura media de los habitantes mayores de edad de dicha ciudad.

Solución:

Queremos estimar la media de la población, μ, mediante una muestra de tamaño 80, con un nivel de confianza del 95,44%.

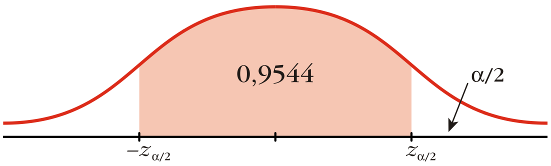
Como la varianza es conocida, $\sigma^2 = 36\ cm^2$, tenemos que la desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{36} = 6\ \text{cm}$$

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un 95,44%, tenemos que:



$$1 - \alpha = 0{,}9544 \ \rightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}0228$$

$$P\left[z \le z_{\alpha/2}\right] = 0{,}9544 + 0{,}0228 = 0{,}9772 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 2$$

Por tanto, el intervalo será:

$$\left(172 - 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{80}};\ 172 + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{80}}\right);\ \text{es decir, } (170{,}66;\ 173{,}34)$$

Tenemos una confianza del 95,44% de que la estatura media de toda la población está entre 170,66 y 173,34 cm.

<u>Ejercicio nº 25.-</u>

Los pesos en una determinada población siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 5 kg. Pesando a 10 individuos de dicha población, se obtuvieron los siguientes resultados medidos en kilogramos:

62 65 63 58 64 60 57 62 60 58

Halla un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de la población.

Solución:

Queremos estimar la media de la población, mediante una muestra de tamaño 10, en una población normal, con un nivel de confianza del 90%.

Como σ es conocida, el intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el 90%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 1{,}645$

La media muestral la obtenemos a partir de los datos:

$$x = \frac{57 + 58 \cdot 2 + 60 \cdot 2 + 62 \cdot 2 + 63 + 64 + 65}{10} = 60{,}9 \text{ kg}$$

Por tanto, el intervalo será:

$$\left(60{,}9 - 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}};\ 60{,}9 + 1{,}645 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}\right); \text{ es decir, } (58{,}30;\ 63{,}50)$$

Tenemos una confianza del 90% de que el peso medio de la población está entre 58,30 y 63,50 kg.

<u>Ejercicio nº 26.-</u>

En un determinado lugar, se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1 060 euros con una desviación típica de 200 euros. Si se considera un nivel de significación igual a 0,01, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor de 30 euros?

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para un nivel de significación de 0,01, tenemos que:

$$\alpha = 0{,}01 \rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575.$$

El valor de σ lo aproximamos por $s = 200$ euros.

Sabemos que $E = 30$ euros.

Sustituyendo la expresión anterior, tenemos que:

$$30 = 2{,}575 \cdot \frac{200}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{2{,}575 \cdot 200}{30} = 17{,}17 \rightarrow n = 294{,}69$$

Deberemos tomar una muestra de, al menos, 295 personas.

<u>Ejercicio nº 27.-</u>

El peso, en kilogramos, de un determinado colectivo se distribuye según una normal de desviación típica igual a 5 kg.

¿Cuántos individuos debemos seleccionar en la muestra si queremos que la media de la muestra no difiera en más de 1kg de la media de la población, con probabilidad 0,95?

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una probabilidad de 0,95; tenemos que $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Además, sabemos que $\sigma = 5$ kg y que $E = 1$ kg.

Sustituimos en la expresión anterior y despejamos n:

$$1 = 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \quad \to \quad \sqrt{n} = 1{,}96 \cdot 5 = 9{,}8 \quad \to \quad n = 96{,}04$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 97 individuos.

Ejercicio nº 28.-

En una muestra de 1 000 personas, mayores de 18 años, de una ciudad, hemos obtenido una estatura media de 1,72 m y una desviación típica de 0,4 m.

Con estos datos, hemos concluido que, la estatura media de los habitantes mayores de 18 años de esa ciudad está entre 170 cm y 174 cm. ¿Con qué nivel de confianza hemos llegado a dicha conclusión?

Solución:

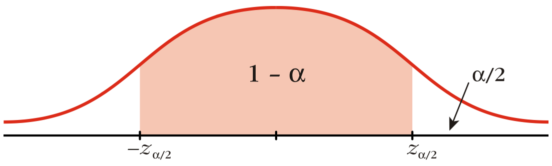
La expresión que nos da el error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Sabemos que $E = \frac{174 - 170}{2} = 2\text{ cm} = 0{,}02\text{ m}$

Como no conocemos σ, tomamos $s = 0{,}4$ m. Y sabemos que $n = 1\,000$.

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}02 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{1\,000}} \quad \to \quad z_{\alpha/2} = \frac{0{,}02 \cdot \sqrt{1\,000}}{0{,}4} = 1{,}58$$



$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9429 \quad \to \quad \alpha = 0{,}1142 \quad \to \quad 1 - \alpha = 0{,}8858$$

El nivel de confianza es del 88,58%.

Ejercicio nº 29.-

Se sabe que el contenido de fructosa de cierto alimento sigue una distribución normal cuya varianza es conocida, teniendo un valor de 0,25. Se desea estimar el valor de la media poblacional mediante una muestra, admitiéndose un error máximo de 0,2 con una confianza del 95%. ¿Cuál ha de ser, como mínimo, el tamaño de la muestra?

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una confianza del 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}95 \;\to\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Como la varianza es $\sigma^2 = 0{,}25$, la desviación típica será $\sigma = 0{,}5$.

Sabemos, además, que $E = 0{,}2$.

Por tanto, sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}2 = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{0{,}2} = 4{,}9 \quad \rightarrow \quad n = 24{,}01$$

Debemos tomar una muestra de tamaño, como mínimo, 25.

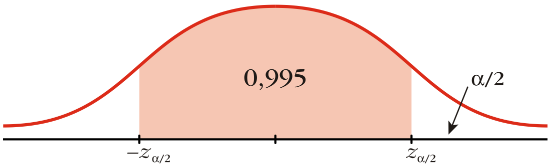
<u>Ejercicio nº 30.-</u>

La edad de los alumnos que se presentan a las pruebas de acceso a la universidad sigue una distribución normal con varianza 0,36. Deseamos estimar la edad media de dichos estudiantes con un error menor de 0,2 años y con una confianza del 99,5%. ¿De qué tamaño, como mínimo, debemos seleccionar la muestra?

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para una confianza del 99,5%, tenemos que:



$$1 - \alpha = 0{,}995 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}0025 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9975$$

$$P\,[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}9975 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2{,}81$$

Si la varianza es $\sigma^2 = 0{,}36$; entonces, la desviación típica será $\sigma = \sqrt{0{,}36} = 0{,}36$ años.

Sabemos, además, que $E = 0{,}2$.

Por tanto, si sustituimos en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}2 = 2{,}81 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{2{,}81 \cdot 0{,}6}{0{,}2} = 8{,}43 \quad \rightarrow \quad n = 71{,}06$$

Debemos seleccionar, como mínimo, una muestra de 72 estudiantes.